Anno Accademico 2021/2022
Geometria 1
Prova scritta del 5/9/2022

Sia n un intero postivo fissato.
Per $A \in M(n, \mathbb{C})$, indichiamo con A^* la matrice aggiunta di A (la trasposta coniugata di A, $A^* = \overline{A}^\top$), e con $adj(A) \in M(n, \mathbb{K})$ la matrice aggiunta classica di A (il cui elemento di posto (i, j) è $(-1)^{i+j} \det \underset{\not{j}-}{\overset{\not{i}}{A|}}$, dove $\underset{\not{j}-}{\overset{\not{i}}{A|}}$ è la matrice ottenuta da A eliminando la colonna i e la riga j).
Indichiamo inoltre con $sp(A)$ lo spettro di A, e per $\lambda \in sp(A)$, indichiamo con $mg(\lambda)$ la molteplicità geometrica dell'autovalore λ.

Esercizio 1.

a) Siano $S, T \subset M(n, \mathbb{C})$ due sottoinsiemi tali che $\mathrm{Span}(S) = \mathrm{Span}(T)$.
Mostrare che esiste un autovettore in comune a tutti gli elementi di S se e solo se esiste un autovettore in comune a tutti gli elementi di T.
Mostrare che gli elementi di S sono simultaneamente triangolabili se e solo se gli elementi di T sono simultaneamente triangolabili.

b) Mostrare che se $A, B \in M(n, \mathbb{C})$ sono tali che $AB - BA = A$ allora A non è invertibile e $\mathrm{Ker}(A)$ è B-invariante (può essere utile dimostrare che nessuna matrice $M \in M(n, \mathbb{C})$ è simile a $M + I_n$).

Siano $A_1, A_2 \in M(n, \mathbb{C})$ tali che il loro commutatore $C = A_1A_2 - A_2A_1 \in \mathrm{Span}(A_1, A_2)$.

c) Mostrare che, se $C \neq 0$, allora esistono $B_1, B_2 \in \mathrm{Span}(A_1, A_2)$ non nulle tali che $B_1B_2 - B_2B_1 = B_1$.

d) Mostrare che A_1 e A_2 sono simultaneamente triangolabili e dedurne che C è nilpotente (suggerimento: mostrare che A_1 e A_2 hanno un autovettore in comune e procedere per induzione su n).

Esercizio 2.
Per $n \geq 3$, sia $A \in M(n, \mathbb{C})$ tale che $A + adj(A) \in \mathrm{Span}(I_n)$.

a) Determinare i possibili valori di $\mathrm{rnk}\, A$.

b) Mostrare che la forma normale di Jordan di A contiene solo blocchi di ordine al più 2 e non contiene blocchi di ordine 2 nilpotenti.

c) Mostrare che se lo spettro di A contiene almeno due elementi, allora A è diagonalizzabile. Nel caso in cui A sia anche invertibile, mostrare che $\prod_{\lambda \in sp(A)} \lambda^{mg(\lambda)-1} = 1$.

Scrivere su tutti i fogli nome e numero di matricola. Durata: 3 ore.

Esercizio 3.
Sia $\mathbb{K}$ un campo di caratteristica diversa da 2, sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ di dimensione 4 e sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4\}$ una base di V.
Per $a, b \in \mathbb{K}$, sia $\psi_{a,b}$ il prodotto scalare su V la cui matrice associata nella base $\mathcal{B}$ è

$$M_{\mathcal{B}}(\psi_{a,b}) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & b \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & a \\ b & 1 & a & 2b \end{pmatrix}$$

a) Al variare di $a, b \in \mathbb{K}$, determinare una decomposizione di Witt di $(V, \psi_{a,b})$ e dedurne l'indice di Witt di $\psi_{a,b}$.

b) Mostrare che, fissati $a, b \in \mathbb{K}$, esiste un unico prodotto scalare $\phi_{a,b}$ su V tale che

- $Rad(\phi_{a,b}) \supset Rad(\psi_{a,b})$,
- $\phi_{a,b}(\underline{v}_1, \underline{v}_1) = \phi_{a,b}(\underline{v}_2, \underline{v}_2) = 1$,
- $\phi_{a,b}(\underline{v}_2, \underline{v}_1) = \phi_{a,b}(\underline{v}_2, \underline{v}_3) = 0$,
- $\phi_{a,b}(\underline{v}_1, \underline{v}_3) = \phi_{a,b}(\underline{v}_3, \underline{v}_3) = a$.

c) Per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, determinare gli $a, b \in \mathbb{R}$, per cui $\psi_{a,b}$ è isometrico a $\phi_{a,b}$.

Esercizio 4.
Sia $A \in M(n, \mathbb{C})$. Dimostrare le seguenti affermazioni.

a) $\operatorname{Ker} A^*A = \operatorname{Ker} A$. Se A è normale, allora $\operatorname{Im} A^*A = \operatorname{Im} A$.

b) Esiste $D \in M(n, \mathbb{R})$ diagonale tale che D è simile sia a AA^* che a A^*A.

c) Se $(A^*A)^2 = AA^*$, allora A è normale (può essere utile dimostrare che se $B \in M(n, \mathbb{R})$ è triangolabile e B è simile a B^2, allora $sp(B) \subset \{0, 1\}$).

d) Se $(A^*A)^2 = AA^*$, allora gli autovalori non nulli di A hanno modulo 1.